

数学机械化发展回顾

王东明 法国巴黎第六大学/北京航空航天大学

高小山 刘卓军 李子明 中国科学院数学与系统科学研究院

吴文俊先生于 1978 年发表了第一篇机器证明的论文。此后三十余年，数学机械化是他倾注心血最多的研究方向。在庆祝吴先生九十华诞之际，作为最早跟随他从事数学机械化研究的学生，我们希望通过本文回顾一下数学机械化的发展过程和其中的主要事件。数学机械化的研究和发展大致可以分为四个阶段。

一、创立阶段 (1978—1984)

这一阶段基本上是吴文俊先生自己创立数学机械化并在该领域从事研究。

因为当时无计算机可用，吴文俊先生凭借坚韧的毅力，通过手算，用自己的方法证明了 Feuerbach 定理。证明过程涉及的最大多项式有数百项，手算时间大约为 24 小时。这一计算是非常困难的，任何一步出错都会导致以后的计算失败。但也正是 Feuerbach 定理的证明使吴方法的可行性得到验证，从而坚定了吴先生对机器证明研究的信心。稍后，吴先生又亲自编程，在机器上证明了 Morley 定理，并发现了若干新定理 (如 Pascal 圆锥曲线定理等)。

这段时间，吴文俊先生主要研究初等几何与微分几何 (曲线论) 定理的机器证明，并于 1984 年出版了第一本数学机械化专著《几何定理机器证明的基本原理》，内容包括理论体系的建立、基本方法的数学基础、算法的详细描述和例子等。该书由王东明、金小凡翻译成英文，于 1994 年由 Springer 出版。此书和周咸青 1988 年在美国出版的专著已成为几何定理机器证明的经典参考文献。周咸青的著作不仅用优美简洁的语言介绍了吴文俊的几何定理机器证明方法，还通过 512 个例子说明了吴方法的有效性。

二、成长阶段 (1984—1989)

这一阶段的主要特点有两个：其一是国内外学者开始从事数学机械化的研究，其二是数学机械化研究的重点由机器证明转向方程求解与应用。

第一个追随吴文俊先生从事数学机械化研究的是周咸青。他自学成才，1978年第一批通过考试成为中国科学院计算技术研究所（简称中科院计算所）唐稚松先生的研究生。他在中国科学院研究生院学习期间有机会听到吴先生关于机器证明的讲座，产生了兴趣。周咸青于1980年赴美国 Texas 大学 Austin 分校数学系攻读博士学位，师从 R. Boyer。在一次讨论班上他报告了吴文俊的工作。Boyer 认为这是一个优秀的工作并鼓励周咸青以这一方向作为博士论文选题。周咸青于1984年在美国数学会“自动定理证明：25年回顾”研讨会文集上发表了一篇关于用吴方法证明几何定理的论文。吴文俊自己也有两篇论文在该会议录上发表：一篇是在《中国科学》上发表的第一篇论文的重印，另一篇是有关几何定理机器证明的新进展。这三篇论文的发表使得吴文俊的工作为西方学术界所知，拉开了国外对吴方法研究与推广的序幕。

这一阶段可以说是国外研究吴方法的一个高潮。这与如下现象密切相关：在自动推理领域研究几何定理证明由来已久。最早的研究工作始于20世纪50年代，但所提出的方法基本上只能证明几乎是“同义反复”的结果，而吴方法可以证明非常困难的定理。几何计算与推理是计算机视觉、机器人、计算机图形学等领域的基本问题，其中还有很多困难问题没有得到圆满解决。人们认为吴方法不仅是几何定理上的突破还可能在其他相关领域得到应用。因此，很多领域的学者（如美国 Purdue 大学的 C. M. Hoffmann 和 Cornell 大学的 J. E. Hopcroft 等）都非常关注吴文俊的工作。

这一阶段国外直接受吴文俊工作影响的研究主要在下列机构：①美国 Texas 大学 Austin 分校。主要是周咸青，他1985年在该校获得博士学位，于1988年出版了关于几何定理机器证明的专著。②美国通用电气 (GE) 研究小组。该小组由 D. Kapur 与 J. L. Mundy 领导，其他成员有 H. P. Ko, M. A. Hussain 等人。他们不仅研究几何定理的机器证明，还将吴方法用于计算机视觉的研究。③奥地利 Linz 大学研究小组。主要有 B. Kutzler 与 S. Stifter，该小组的领袖是以发明 Gröbner 基著称的 B. Buchberger。以上三个小组大约于1986年同时提出几何定理机器证明的 Gröbner 基方法。

国内数学机械化的研究也因吴文俊先生的研究生的到来出现了研究小组。这

里列出最早的几位学生：王东明 (1983—1987)，获博士学位；胡森 (1983—1985)，获硕士学位；高小山 (1984—1988)，获博士学位；刘卓军 (1986—1988)，获博士学位；李子明 (1985—1988)，获硕士学位。这批学生后来成了国内数学机械化研究的中坚力量。

除研究工作外，这支队伍还开办了“数学机械化讨论班”和编印“数学机械化研究预印本”(Mathematics-Mechanization Research Preprints)。这两件事坚持至今，对国内数学机械化的发展起到了很大的作用。

(1) 数学机械化讨论班。始于 1984/1985 年冬春之交，每周四下午举行，采取各种形式介绍数学机械化的发展动向。该讨论班坚持了二十几年，吴先生只要在北京，必来参加。数学机械化讨论班最初是由吴先生讲授“机器证明”课程。这一课程先在研究生院 (1984 年秋)，后转到中关村系统所。课程讲完之后，开始研讨 W. V. D. Hodge 和 D. Pedoe 的《代数几何方法》一书，主要由研究生负责读书、讲课。吴先生在下面听讲，给予指点，并亲自讲了代数对应原理等章节。从那时起，系统所的石赫老师和北京市计算中心的吴文达先生等先后参加数学机械化的研讨活动。

讲完《代数几何方法》的基本内容之后，数学机械化讨论班的主要内容是介绍、研讨国外与数学机械化相关领域的重要结果和最新进展。例如，吴文达介绍了 H. Stetter 利用 Macaulay 结式求解代数方程组的工作，石赫讲了如何用吴方法研究控制论中的问题，王东明介绍了 Gröbner 基，高小山介绍了实代数中的柱状分解 (cylindrical algebraic decomposition)，刘卓军介绍了数理逻辑中的归结原理 (resolution principle)，李子明介绍了符号计算中的模方法 (modular methods) 等。

(2) 数学机械化研究预印本。编印这一非正式出版物的最初想法是，让国外能尽快知道我们的研究工作。形式是将数学机械化研究小组的论文定期合在一起印刷出版，并送往国内外有关研究单位。数学机械化研究预印本于 1987 年出版第一期，至今已经出版了 28 期。吴先生对前两期倾入了很多心血，亲自修改其中论文。当时还没有 TeX 排版系统，数学公式的排版非常困难。吴先生自己发明了一套记号，不使用上下标也可以比较准确地表示数学公式。数学机械化研究预印本的发行极大地扩大了数学机械化在国际上的影响。有不少相关的国际研究机构对数学机械化研究预印本感兴趣。法国、西班牙和俄罗斯 (苏联) 的学者都是通过预印本了解到数学机械化的具体内容，并在我们的结果的基础上开展了进一步的研究。

这一时期国内两支很强的力量加入到了数学机械化研究的行列：北京计算机学院的洪加威和中科院成都数理中心的张景中、杨路。洪加威于 1986 年发表了两篇有关例证法的论文。这两篇论文以吴方法为基础，用数值计算的方法证明几何定

理。张-杨小组大约于 1987 年开始从事数学机械化研究，最初的切入点也是例证法。这个小组从那时起以机器证明为主要研究方向，成了数学机械化研究的一支重要方面军。张景中先生由于几何定理机器证明的工作于 1995 年当选为中国科学院院士。

这个时期数学机械化研究的内容有两个特点：几何定理机器证明新方法的出现与数学机械化方法的应用开始得到重视。吴文俊给出了公式自动推理与发现的算法、代数方程组的投影算法、不等式的自动证明方法、偏微分代数方程组的整序算法和微分几何（曲面论）定理机器证明的基本原理。国内的其他学者和吴文俊的学生在吴方法的应用和改进方面也做了大量有意义的工作，例如单例证法和并行例证法的提出，吴方法在控制论中的应用，微分系统极限环的构造，多项式（因子）分解，重根分类和复根分离，立体几何、非欧几何、三角恒等式和力学中的定理自动证明与公式推导，多项式消元过程中冗余因子的判定，参数方程的隐含化，相关软件的开发等。

吴先生还身体力行地从事应用研究。他关于平面机构运动学和曲面拟合的工作，对后来的数学机械化研究产生了重要影响，其中由 Kepler 经验定理自动推导 Newton 反平方律值得一提。1986 年吴文俊在美国能源部 Argonne 实验室访问时得知，该实验室有人正在从事这方面的研究。回国后，他用自己的方法成功地由 Kepler 经验定理推导出了 Newton 定理，成为机器证明的范例。

在吴文俊的工作影响下，周咸青、Kapur、Kutzler、Stifter 和 W. F. Schelter 等人利用 Gröbner 基方法证明几何定理，并探讨了重写规则在几何定理机器证明中的应用，F. Winkler 对吴文俊提出的非退化条件作了深入研究，M. Kalkbrener 给出了用 GCD 证明几何定理的方法。

吴文俊关于机构学与机器人的研究影响深远，成了数学机械化应用研究的一大主要方向，至今仍在继续。主要工作包括 Puma 型串联机器人的研究（吴文俊，1984），Stewart 并行机器人的研究（吴文达、廖启征等，1992），6R 串联机器手的研究（梁崇高、廖启征、符红光等），连杆机构的设计（刘慧林、廖启征、高小山等），其中又以 Stewart 平台的研究最为重要。这一机构有两个重要应用：①基于 Stewart 平台的数控机床，被称为“二十一世纪的机床”和“用数字制造的机床”。这一应用由清华大学汪劲松小组协同北京邮电学院廖启征小组和北京理工大学刘慧林小组，共同成为“973”项目“数学机械化与自动推理平台”的一个子课题。吴先生对这项研究十分重视，曾亲临清华大学与北京理工大学指导工作。②由中国天文台南仁东研制的世界上最大的射电望远镜预空项目中用到了某种软性 Stewart 平台与硬性 Stewart 平台。“973”项目 Stewart 课题组承担了这一平台的制造。关

于 Stewart 平台的研究，还在吴文俊的大力推进下得到了中国科学院的支持，继续发展为基于数学机械化方法的数控系统的研究，并得到了国家重大专项的支持。

吴先生本人在这一阶段最富传奇色彩的是，在花甲之年学习计算机编程，并亲自用 Fortran 语言实现了符号计算和几何定理证明的算法。吴先生上机之勤奋，更在系统所成为美谈。下面引用石赫撰写的“大局观与笨功夫”中一段话。“在近耳顺之年，吴文俊从零开始学习编写计算机程序，亲自上机。70 年代末，当时的计算机性能是非常初步的。在相当困难的条件下，他以极大的热情再次下笨功夫。简单的袖珍计算器，也变成他心爱的进行定理证明的工具。吴文俊的勤奋是惊人的。80 年代中期，系统所购置了 HP-1000 计算机。他的工作日程经常是这样安排的：早晨 8 点不到，他已在机房外等候开门，进入机房后是近 10 个小时的连续工作，傍晚回家进餐，还要整理计算结果，两个小时后又到机房，工作到深夜或次日凌晨。第二天清晨，又出现在机房上机，24 小时连轴转的情况也常有发生。若干年内，他的上机时间遥居全所之冠。在近古稀之年，他仍然精力充沛地忘我拼搏。当时中关村到处修路，挖深沟埋设管道，他经常在深夜独自一人步行回家，跨沟翻丘，高一脚低一脚，有时下雨，则要趟着没膝深的雨水摸索前行。那是一幅多么感人的情景！几经寒暑，几度春秋，义无反顾的拼搏，终于获得丰硕的成果。”

另一重要事件是国家自然科学基金委于 1988 年组织了“现代数学若干重大问题”重大项目，机器证明成为该项目的组成部分。具体是由吴文俊、胡国定、堵丁柱三位组成了计算机数学研究课题组。该重大项目由北京大学程民德先生主持。程先生从此开始关注数学机械化研究，并成为数学机械化研究的主要推动与支持者之一。程民德与石青云院士应用吴方法研究了小波的构造与立体视觉。程先生还鼓励他的博士生李洪波从事数学机械化方面的研究。李洪波在他的博士论文中利用 Clifford 代数给出了证明几何定理的新方法。

几何定理机器证明方法自 1984 年美国数学会自动定理证明会议起在西方学术界开始流行。1986 年，吴文俊先生被邀请到北美多个学术机构访问。这些机构包括加拿大的 Waterloo 大学（在该校吴先生参加了 SYMASAC '86）和美国的 Courant 研究所、GE 有关研究所、Texas 大学 Austin 分校、California 大学 Berkeley 分校等。

三、形成体系（1990—1998）

这里所说的数学机械化体系有两层意思。一是学术上数学机械化已经渐成体系，吴先生对数学机械化的目标作了更清楚的论述。二是“数学机械化研究中心”

于 1990 年成立, 吴先生亲自担任中心主任, 数学机械化从此有了自己的研究机构。

吴文俊的工作自 1984 年传入美国, 经过若干年的研究与认识, 在国际自动推理与符号计算界产生了很大影响, 标志有两个:

(1) 吴文俊的工作获得了自动推理界权威 W. Bledsoe, L. Wos, R. Boyer, J. Moore, D. Kapur 等人的高度评价。

(2) 国外学术界竞相学习吴方法。吴文俊的工作成为若干个国际学术会议的主要议题。这些会议对以后的研究产生了巨大影响。

吴文俊的工作的重要性在国内也逐渐被认识。1990 年国家科委拨 100 万元科研经费专门支持数学机械化研究。这在当时是一件具有轰动效应的事情。中国科学院也在 1990 年宣布成立“数学机械化研究中心”, 吴先生任主任, 程民德先生任学术委员会主任, 日常工作由北京市计算中心吴文达先生主持。国务委员、国家科委主任宋健和中国科学院周光召院长亲自参加了中心成立大会。中国科学院还拨出专项经费为中心购买计算机设备。

由陈省身先生主持的“南开数学中心”于 1991 年举办了“计算机数学年”。具体活动由石赫负责, 主要活动如下:

第一次邀请了一批国际上从事计算机数学研究的专家访问中国。邀请的专家包括 G. E. Collins, C. Bajaj, M. Mignotte, V. Gerdt。他们都访问了南开和数学机械化研究中心, 其中 Bajaj 的访问与讲演启发了吴先生关于计算机辅助几何设计中的曲面拟合的研究。

“计算机数学年”组织开设了数学机械化课程: 由石赫讲机器证明, 黄文奇讲计算复杂性, 袁仁葆讲符号计算。其间还组织了第一次“数学机械化研讨会”, 李天岩教授参加了本次会议并介绍了解多项式方程组的同伦算法。国内参会的专家有冯果忱、张鸿庆、黄文奇等, 他们后来成了数学机械化的研究力量。研讨会的论文集由新加坡 World Scientific 出版社出版, 吴文俊和程民德主编。

1992 年“机器证明及其应用”国家攀登项目由国家科委立项, 吴文俊任首席科学家。该项目由来自全国各地 20 所大学和科研机构的 30 人共同承担, 总经费 5 年 500 万元。国内数学机械化队伍由此开始形成。由于数学机械化初创不久, 从事机器证明的人员并不多。吴文达先生从他熟悉的计算数学和计算机科学领域中推荐了多位学者加入到数学机械化研究的行列并参加了上述攀登项目。这些专家包括吉林大学的冯果忱、中科院软件所的黄且园、大连理工大学的王仁宏、华中科技大学的黄文奇、兰州大学的李廉等。吴文达还带领自己在北京市计算中心的研究队伍完全转向数学机械化研究。在此期间, 林东岱、王定康、李洪波、支丽红等年轻博士来到数学机械化研究中心工作。

1997年,“机器证明及其应用”项目转变为国家“九五”攀登预选项目“数学机械化及其应用”,吴文俊先生任首席专家。国家自然科学基金委数理学部的许忠勤副主任作为管理专家参加了项目的专家委员会,为数学机械化的发展做了大量工作,包括介绍有关人员(李会师、曾广兴等学者)从事数学机械化研究。

可以说,1990年数学机械化研究中心的成立、1991年“南开计算机数学年”的举办和1992年“机器证明及其应用”攀登项目的立项,使得数学机械化研究的体系和队伍在国内初步形成。

1992—1994年,吴先生先后获得第三世界数学奖、陈嘉庚数理科学奖和首届求是杰出科学家奖。系统所为此举行了庆祝大会。1997年,吴先生荣获国际自动推理大会(CADE)颁发的“Herbrand自动推理杰出贡献奖”,成为继A. Robinson和L. Wos之后的第三位获奖者。由美国纽约州立大学Stony Brook分校的J. Hsiang起草的授奖词高度评价了吴先生的工作。同年,吴先生在澳大利亚举行的第14届国际自动推理大会上作邀请报告。

这段时间,数学机械化研究中心开始组织国际学术会议。“数学机械化研讨会”于1992年在北京举办。这是数学机械化领域举办的第一个国际会议,大家对此相当重视,吴文俊先生亲自主持,具体组织工作由高小山负责。会议在刚刚建成的中科院外专公寓圆满举办,参加会议的国外学者包括M. E. Alonso, C. Bajaj, G. Gallo, V. Gerdt, C. M. Hoffmann, D. Kapur, Y. Manome, T. Mishima, B. Mishra, T. Mora, M. Otake, M. Raimondo, H. Suzuki, A. Yu Zharkov, 周咸青等。国内从事相关研究的大部分学者都参加了会议。会议的论文集由吴文俊、程民德主编。

1995年由数学机械化研究中心与日本符号计算协会共同主持召开了首届“Asian Symposium on Computer Mathematics”(ASCM'95)。吴文俊任会议主席,会议的组织工作由石赫具体负责。王东明、H. Kobayashi等人也为会议的举办做了不少工作。中日双方决定将ASCM办成一个系列会议,之后ASCM'96在日本Kobe大学举办,ASCM'98在兰州大学举办,ASCM 2000在泰国清迈举办,ASCM 2001在日本松山举办,ASCM 2003在北京举办。吴先生参加了ASCM'95, ASCM'98, ASCM 2000和ASCM 2003,并在ASCM'98之后访问了新疆大学。

另一个与吴文俊的工作有密切关系的国际系列会议“Automated Deduction in Geometry”(ADG)由王东明创办,于1996年在法国Toulouse举行了第一次会议。ADG'98在北京举行,吴文俊在会上做了邀请报告。ADG 2000在瑞士苏黎世ETH举行,吴文俊作了“多项式方程求解及其应用”的公开讲演,并顺访了法国巴黎(除了在巴黎第六大学作学术访问外,还拜访了吴文俊的老师H. Cartan与同窗好友R. Thom)。在ADG系列会议之前,吴文俊还于1992年在奥地利Weinberg举办的

“Algebraic Approaches to Geometric Reasoning”研讨会上作了邀请报告，并访问了Linz 大学符号计算研究所。

这一时期吴文俊提出了基于 Riquier-Janet 理论计算 Gröbner 基的方法 (1990)、全局优化方法 (1992)、代数方程求解的混合方法 (1993)、计算机辅助几何设计中的曲面拟合方法 (1993)、多项式的因子分解方法 (1994)，并研究了中心构型 (1995)。

四、再度辉煌 (1999—2009)

这一时期以数学机械化研究入选国家首批“973”项目和吴文俊获首届“国家最高科技奖”为标志，使吴文俊先生在年过八旬之后再度辉煌。

按照原国家科委的安排，国家重点基础研究发展规划“973”项目于 1998 年启动。当时，“九五”攀登预选项目“数学机械化及其应用”刚刚启动，对于是否应该争取“973”项目大家心里没底。吴文俊、程民德、高小山、刘卓军等多次讨论，最后吴文俊讲道：“箭在弦上，不得不发”，随即决定申请。项目的申请得到了国家自然科学基金委许忠勤先生与科技部邵立勤先生的鼓励与支持。经过激烈竞争，数学机械化首批进入国家“973”项目。在 1998 年秋天的评审中，共有 270 多个项目申请。经过三轮答辩，共评出十五项，“数学机械化与自动推理平台”为其中之一。按科技部的规定，吴文俊先生因年龄原因不再担任首席科学家，改任项目学术指导，由高小山任首席专家。

这一项目能够通过评审与吴先生重视数学机械化的应用研究密不可分。吴先生曾经指出，“应用是数学机械化的生命线”。在吴先生的这一思想指导下，国内数学机械化研究队伍在机器人、计算机图形学、物理学、力学和机械等领域进行了长期的研究，这些研究在申请“973”项目时起了很大作用。共有来自近 30 所大学和研究所的 70 名成员正式参加了该“973”项目。

2000 年中科院推荐吴文俊先生参加“首届最高科学技术奖”的评选。国家奖励办对评选十分重视，安排了三轮答辩。首轮答辩由候选人单位介绍候选人工作。吴先生的工作由高小山、石赫介绍，评委会组长为汪成为先生。中间还有专家到系统所实地考察。第三轮答辩由吴先生本人介绍自己的工作，评审组长为朱丽兰部长。最后再由奖励办向国家奖励委员会介绍。吴先生得以获奖主要是因其对拓扑学的基本贡献和开创了数学机械化研究领域。

吴先生虽然年过八旬，但雄心不减。得到 500 万元奖金后，他设立了以下三个基金支持有关研究。

(1) 数学机械化应用推广专项经费，由吴文俊个人基金、中科院、中科院数学

与系统科学研究院、国家基金委天元基金共同支持。

(2) 数学与天文丝路基金，主要支持中国数学史的研究。

(3) 数学机械化思维与非数学机械化思维研究基金。

多年停顿后，中国科学院于 2002 年重新开始重点实验室的评审。数学机械化研究中心积极组织申请，获得批准。吴文俊先生非常重视实验室的申请，亲自参加答辩。数学机械化研究中心实际上也是中科院批准成立的，但研究中心系列没有像当初预想的那样发展起来，以至于中心的运行经费得不到中科院支持。重点实验室的成立改变了这一状况。

数学机械化重点实验室整合了数学机械化研究中心与万哲先院士建立的信息安全研究中心的力量，主要开展数学与计算机科学交叉研究，在符号计算、自动推理、密码学等领域在国际上有重要影响。

数学机械化在国外最主要的对应研究领域是符号计算或计算机代数。符号计算领域最权威的国际会议是由国际计算机协会 (ACM) 组织的 ISSAC。ISSAC'92 在美国 California 大学 Berkeley 分校举办，吴文达、高小山代表数学机械化研究中心参加了这次会议，并在会上提出了在北京举办 ISSAC'94。申办 ISSAC'94 的另外两个城市是英国的 Oxford 和加拿大的 Montreal。我们的申请得到了 P. S. Wang 和 E. Kaltofen 等人的支持，但有些人对在北京举办 ISSAC 有不同意见。最后，英国的 Oxford 得到了举办权。此次申办 ISSAC 虽未获成功，但却也显示了我们的力量，扩大了数学机械化的影响。2003 年我们又一次申办 ISSAC 并获得成功。ISSAC 2005 在北京成功举办。

符号计算领域最权威的国际期刊是符号计算杂志 (*JSC*)。数学机械化在 ISSAC 和 *JSC* 中的影响逐渐增强，已成为 ISSAC 和 *JSC* 的重要内容。吴文俊曾两次在 ISSAC 上做邀请报告，并担任 *JSC* 创始编委。高小山 2008 年当选为 ISSAC 指导委员会主席。王东明、高小山、李子明、支丽红等都曾多次担任 ISSAC 大会主席或程序委员会委员，并先后成为 *JSC* 编委。

2006 年，吴文俊与 D. Mumford 分享了当年的邵逸夫数学奖。评奖委员会对吴文俊在数学机械化方面的工作给予了高度评价，认为：“吴的方法使该领域发生了一次彻底的革命性变化，并导致了该领域研究方法的变革。通过引入深邃的数学想法，吴开辟了一种全新的方法，该方法被证明在解决一大类问题上都是极为有效的，而不仅仅是局限在初等几何领域。”其工作“揭示了数学的广度，为未来的数学家们树立了新的榜样。”