吴文俊对拓扑学的伟大贡献*

李邦河 中国科学院数学与系统科学研究院

一、示性类的划时代者

1. 破解“难学”的奇才

向量丛的模 2 示性类几乎同时由 Whitney 和 Stiefel 在 1935 年独立引进，故名为 Stiefel-Whithey 示性类。

代数拓扑学，是公认的难以学懂、更难以做出成果的一门学问，因此被戏称为“难学”。有一个小插曲 —— 在凤凰电视台的《李敖有话说》节目中，文学家李敖说：听说有一门学问叫拓扑学，非常难学。

示性类理论，作为拓扑学中妙不可言的精品，自然更是“难学”中的“难学”。1940 年，Whitney 发表了 Stiefel-Whithey 示性类的乘法公式的文章。因为证明极为复杂，没有全部刊出，故在论文发表后，他仍不得不保留详细的原稿。而吴文俊，在 1947 年，在学习和研究拓扑学不到一年之后，即给出了这一公式的较为简短的证明，全文发表在顶尖杂志 *Annals of Mathematics* 上。据项武忠说，Whitney 于是认为，从此他的手稿可以不必保留了。

闻此，国内外同行无不啧啧称奇：吴文俊，真奇才也!

2. 吴示性类和第一吴公式

吴示性类定义如下：设 M 是 n 维的紧致无边微分流形，则对任意 $i=0,1,\cdots,n$，存在上同调类 $V_i\in H^i(M,Z_2)$，使对任意 $X\in H^{n-i}(M,Z_2)$，

$$V_iX=Sq^iX,$$

这里 Sq^i 是 Steenrod i-平方运算，而 V_i 就是第 i 个吴示性类，简称吴类。

令

* 转载自《吴文俊与中国数学》，2010 年 4 月，八方文化创作室。

$$\begin{aligned} Sq &= Sq^0 + Sq^1 + \cdots, \\ V &= 1 + V_1 + \cdots + V_n, \\ W &= 1 + W_1 + \cdots + W_n, \end{aligned}$$

这里 W_i 是 M 的切丛的第 i 个 Stiefel-Whithey 示性类，则有

第一吴公式：$W = SqV$。

这一公式的重要意义在于：① 揭开了笼罩在 Stiefel-Whithey 示性类头上神秘的面纱，使它们变得极易计算。② Stiefel-Whithey 示性类的拓扑不变性，曾是当时的拓扑学家关注的问题。而该公式则轻而易举地揭示了，它们不仅是拓扑不变的，而且还是同伦不变的。

3. 第二吴公式

年轻的吴文俊在示性类上的卓越贡献引来了大数学家 Weil 的青睐。他告诉吴文俊：Grassmann 流形上的 Steenrod 运算还没有算出。Weil 果然慧眼识英雄：精通 Steenrod 运算的吴文俊，正是完成此项任务的最佳人选。经过在咖啡馆里一个月的艰难而又充满智慧和快乐的奋战，吴文俊得到著名的第二吴公式

$$Sq^k W_m = W_k W_m + \left(\begin{array}{c} k-m \\ 1 \end{array} \right) W_{k-1} W_{m+1} + \cdots + \left(\begin{array}{c} k-m \\ k \end{array} \right) W_0 W_{m+k},$$

这里的 W_1 经向量丛的分类映射被拉回到底空间的上同调群里，就成为该丛的第 i 个 Stiefel-Whithey 示性类。1956 年 Dold 证明，这一公式给出了 Stiefefl-Whithey 示性类之间所有可能的关系。

4. 如上所说, Steenrod 运算与示性类关系极为密切, 而精通这两者的吴不仅对示性类功勋卓著, 在 Steenrod 运算上也留下了历史的印记。正如 Cartan 指出的, 在 Steenrod 运算的公里化定义中的一条公理 ——Cartan 公式, 是吴文俊向他建议的。

5. Pontrjagin 示性类

1942 年 Pontriagin 引进了一类整系数的示性类，其论文用俄文发表，在苏联之外，少有人懂。吴文俊以他独到的敏锐观察，认识到这些示性类的重要性。于是，没有学过俄文的他，硬是借助语法书和词典，弄懂了 Pontrjagin 的文章，并介绍给同窗好友 Thom，成为 Thom 研究协边理论的有力武器。

而吴文俊自己对 Pontrjagin 示性类的贡献更是多方面的。

首先，也是最重要的是，他证明了 Pontrjagin 示性类可由陈省身在 1946 年引进的 Chern 示性类导出。后来，他得到的这一关系式就成为了 Pontrjagin 示性类的定义。

其次是他在 1950 年代初从法国回国后发表了一系列论 Pontrjagin 示性类的雄文，不仅证明了它们模 3 和模 4 的拓扑不变性，还引领了对这一神秘的示性类的拓扑不变或非拓扑不变的进一步研究。

此外，他关于四维定向流的 Pontrjagin 示性类是符号差的三倍的猜想，对后世数学的发展，影响非常深远，成为 Hirzebruch 的符号差定理和 Atiyah-Singer 指算定理的源头。

6. 示性类的定名者

Stiefel-Whithey 示性类，Pontrjagin 示性类，Chern 示性类，这些示性类是由谁命名的呢？其命名者就是吴文俊！而且一经吴命名后，它们的名字就被定下来了，再也没有变过。这充分反映了吴文俊在示性类领域的权威地位。

7. 示性类的分水岭

在吴文俊关于示性类的工作之前，示性类之间的关系不清，计算极为困难，迷雾重重；在他的工作之后，则雾散日出，关系昭然若揭，且易于计算。因此，他的工作是分水岭，是对示性类的划时代贡献。

二、独创的示嵌类、示浸类、示痕类

吴文俊在微分流形和复合形的嵌入理论方面是一位承上启下的领袖。

(1) 对复合形，独创地运用 Smith 周期变换定理于复合形的 p 重约化积，定义了示嵌类、示浸类、示痕类，并且用这些类给出了，n 维复形可嵌入于 $R^{2n}(n>1)$，可浸入于 $R^{2n}(n>3)$ 的充分且必要的条件，以及 n 维复形在 $R^{2n+1}(n>1)$ 中的两个嵌入同痕的充要条件。

(2) 1 维复形在平面中的嵌入问题属于图论的范畴，需要特别处理。他完全解决了这一问题，使经典的著名的 Karatowski 不可嵌入定理成为其特例。有趣的是，这是吴在“文化大革命”期间，数学所在阅览室开的批判会上，顺手翻阅书架上一本杂志，看到印刷线路的文章，激发起对该问题的极大兴趣而完成的。这一工作为图论输入了新方法，开辟了新方向。

(3) 他运用 Whithey 技巧证明的定理 $n>1$ 时，任意两个 n 维流形到 R^{2n+1} 的微分嵌入必微分同痕，在 Smale 解决高维 Poincaré 猜想的工作中发挥了重要

作用。

(4) 关于微分流形的嵌入问题，吴文俊在 1958 年前，已有如何用奇点理论的较明晰的想法，后因“大跃进”时期批判“理论脱离实际”而停顿。但他在 1958 年访问法国时关于这一想法的报告，却给听众中的瑞士拓扑学家、吴在留法期间的同门师弟 Haefliger 以极大的启发。Haefliger 在三四年后发表的用奇点理论给出的关于微分嵌入的定理成为该方向的基本定理。

三、“能计算性”与 I^*— 量度

吴在研究中国古代数学史时形成的“构造性数学”的宏大思想，不仅导致了他在定理机器证明和数学机械化方面的伟大贡献，也激发了他在代数拓扑方面构造性地统一处理同调群、同伦群、示性类、上同调运算等的雄心。他以“能计算性”的概念，重新整理和改造 Sullivan 的极小模理论，提出和解决了不少问题。在出版这方面的专著 (*Rational Homotopy Type*: *A Constructive Study via the Theory of the* I^*—*Meaaure*, Lecture Notes in Math., 1987, No. 1264) 之前，他在数学机械化和代数拓扑两条战线上同时作战，精力超群，英勇无比，战果辉煌。有一次，他告诉笔者，在写完上述专著后，他要全力以赴于数学机械化了。今天，他在数学机械化方面的伟大成就，已为全世界所公认。而他关于“能计算性”和 I^*— 量度的革命性思想，则为后人留下了宝贵的财富。